一般線形群の帰納極限(無限次元測度論と無限次元群の表現論)

山崎, 愛一

数理解析研究所講究録
1017 巻 1997 年 92-103

一般線形群の帰納極限

山崎愛一　　京大・理学研究科・数学

§1 $GL_n(\mathbb{C})$ の帰納極限

私は 1995 年秋に、Milnor の Introduction to algebraic K-theory を読んでいて、$GL_n(\mathbb{C})$ の $n \to \infty$ の帰納極限を考える必要が出てきました。何とか群演算と両立するような「帰納極限位相」を作ろうと試みてみたのですが、非可換群であったこともあり、ややこしくてうまく行かなかったのであきらめました。その時は全行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の局所凸ベクトル空間としての帰納極限位相を GL に制限することで話が通じるようになったので、一般に考えるのは止めました。

岩波の数学辞典には位相群の帰納極限も、位相空間としての帰納極限で作れる様に書いてありましたが、私が考えている限りではうまく行かなかったので平井先生に質問しに行ったのです。そのときは平井先生もよくわからなかったのでそのままになっていたのですが、数学辞典が間違っているらしいことはすでにそのとき私がだいたい気がついていました。

その後で 1997 年の初めの辰馬先生の論文で位相群の帰納極限について、位相空間としての帰納極限を取っても群演算が連続にならない例が書いてありました。数学辞典が間違っていたことになります。しかし同じ論文に局所コンパクト群については位相空間としての帰納極限を取って群演算が連続になると書いてありました。そこで前に考えた全行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の局所凸ベクトル空間としての帰納極限位相を GL に制限したものは、位相空間としての帰納極限と同じになるのではないかと考えて、それを証明したのが§1 の内容です。

$$G_n = GL(n, \mathbb{C}), \quad G = GL(\mathbb{C}) = \varinjlim_n GL(n, \mathbb{C})$$

$$x \in G_n \text{を} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{pmatrix} \in G_m \text{と同一視。}$$

$$M_n = M(n,\mathbb{C}), \quad M = M(\mathbb{C}) = \varinjlim_n M(n,\mathbb{C})$$

$$x \in M_n \text{を} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} \in M_m \text{と同一視。}$$

1 の近傍は

帰納極限位相では

$$\mathfrak{u}_1 = \{1 \in U \subset G | {}^{\forall} n \in \mathbb{N} \quad U \cap G_n \text{は} G_n \text{の開部分集合}\}$$

全行列環の局所凸位相ベクトル空間としての帰納極限 M を 1 だけ平行移動したもの $1+M$ の GL への制限位相では

$$U(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{1 + \sum_n x_n \in G | x_n \in M_n \quad \sum_n \frac{||x_n||_n}{\varepsilon_n} < 1\} \text{として}$$

$$\mathfrak{U}_2 = \{U(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) | \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots > 0\}.$$

($||x_n||_n$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の作用素ノルム)

$\mathfrak{U}_1$ と $\mathfrak{U}_2$ が一致することを示すのが§1 の目的である。

まず G は $\mathfrak{U}_2$ で位相群になることを証明する。次の (1)〜(5) を check すればよい。

(1) $1 \in U(\{\varepsilon_n\})$ は明らか。

(2) $U(\{\mathrm{Min}(\varepsilon_n, \varepsilon'_n)\}) \subset U(\{\varepsilon_n\}) \cap U(\{\varepsilon'_n\})$ も明らか。

(3) ${}^{\forall}\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, {}^{\exists}\{\varepsilon'_n\}_{n=1}^{\infty}, U(\{\varepsilon'_n\})^{-1} \subset U(\{\varepsilon_n\})$ を示す。

与えられた $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots > 0$ に対し

${}^{\exists}\varepsilon'_1 > 0 \quad \frac{\varepsilon'_1}{1-\varepsilon'_1} < \frac{\varepsilon_1}{2}$

$0 < {}^{\exists}\varepsilon'_2 < \varepsilon'_1 \quad \frac{1}{1-\varepsilon'_1}\frac{\varepsilon'_2}{1-\varepsilon'_2} < \frac{\varepsilon_2}{2^2}$

$0 < {}^{\exists}\varepsilon'_3 < \varepsilon'_2 \quad \frac{1}{1-\varepsilon'_1}\frac{1}{1-\varepsilon'_2}\frac{\varepsilon'_3}{1-\varepsilon'_3} < \frac{\varepsilon_3}{2^3}$

$\vdots$

$x = 1 + \sum_{n:\text{有限和}} x_n$ において $\sum_n \frac{||x_n||_n}{\varepsilon'_n} < 1$ とする。このとき

$$x^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sum_n x_n)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1 \cdots i_k = 1}^{n} (-x_{i_1}) \cdots (-x_{i_k}).$$

$\mathrm{Max}(i_1,\cdots,i_k)=n$ とすると $||x_{i_1}\cdots x_{i_k}||_n \leq ||x_{i_1}||_n\cdots||x_{i_k}||_n = ||x_{i_1}||_{i_1}\cdots||x_{i_k}||_{i_k} \leq \varepsilon'_{i_1}\cdots\varepsilon'_{i_k} = \varepsilon'^{j_1}_1\cdots\varepsilon'^{j_n}_n(j_1+\cdots j_n = k)$. （$i_1,\cdots i_k$の中に 1 が j_1個,$\cdots$, n が j_n個あるとする。）

kを $1\leq k<\infty$ の範囲で動かして考える。$\mathrm{Max}(i_1,\cdots,i_k)=n$ をみたす単項式全体の和（無限和）を x'_nと記すと、

$$||x'_n||_n \leq \sum_{j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty}\varepsilon'^{j_1}_1\cdots\varepsilon'^{j_n}_n\varepsilon'_n = \varepsilon'_n\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\varepsilon'_k} < \frac{\varepsilon_n}{2^n}.$$

$$x^{-1} = 1+\sum_n x'_n \qquad \sum_n\frac{||x'_n||_n}{\varepsilon_n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

$$\therefore \qquad U(\{\varepsilon'_n\})^{-1}\subset U(\{\varepsilon_n\}).$$

(4) ${}^\forall\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, {}^\exists\{\varepsilon'_n\}_{n=1}^{\infty}, U(\{\varepsilon'_n\})^2\subset U(\{\varepsilon_n\})$ を示す。

与えられた$\varepsilon_1\geq\varepsilon_2\geq\cdots>0$ に対し

$${}^\exists\varepsilon'_1>0 \qquad 2\varepsilon'_1+\varepsilon'^2_1<\varepsilon_1/2$$

$$0<{}^\exists\varepsilon'_2<\varepsilon'_1 \qquad 2\varepsilon'_2+2\varepsilon'_1\varepsilon'_2+\varepsilon'^2_2<\varepsilon_2/2^2$$

$$0<{}^\exists\varepsilon'_3<\varepsilon'_2 \qquad 2\varepsilon'_3+2\varepsilon'_1\varepsilon'_3+2\varepsilon'_2\varepsilon'_3+\varepsilon'^2_3<\varepsilon_3/2^3$$

$$\vdots$$

$x = 1+\sum_{n:\text{有限和}}x_n$, $y=1+\sum_{n:\text{有限和}}y_n$において$\sum_n\frac{||x_n||_n}{\varepsilon'_n}<1$, $\sum_n\frac{||y_n||_n}{\varepsilon'_n}<1$ として

$x'_n = x_n+y_n+\sum_{k=1}^{n-1}(x_ky_n+x_ny_k)+x_ny_n$ とおくと $xy=1+\sum_{n:\text{有限和}}x'_n$

$$||x'_n||_n\leq 2\varepsilon'_n+2\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon'_k\varepsilon'_n+\varepsilon'^2_n<\varepsilon_n/2^n$$

$$\therefore \qquad U(\{\varepsilon'_n\})^2\subset U(\{\varepsilon_n\}).$$

(5) ${}^\forall g\in G, {}^\forall\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, {}^\exists\{\varepsilon'_n\}_{n=1}^{\infty}, gU(\{\varepsilon'_n\})g^{-1}\subset U(\{\varepsilon_n\})$ を示す。

与えられた　$g\in G$ に対し $g\in GL(k,\mathbb{C})$ として

${}^{\forall}U(\{\varepsilon_n\}) \in \mathfrak{U}_2$に対し、$\varepsilon'_n = \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{Max}(n,k)}}{||g||_k||g^{-1}||_k}$ と取る。

${}^{\forall}x = 1 + \sum_n x_n \in U(\{\varepsilon'_n\})$,

$x'_1 = \cdots = x'_{k-1} = 0$, $x'_k = g(x_1 + \cdots + x_k)g^{-1}$, $x'_n = gx_ng^{-1}\,(n \geq k+1)$ とおくと $gxg^{-1} = 1 + \sum_n x'_n$であって

$$||x'_n||_n \leq ||x_n||_n||g||_k||g^{-1}||_k \quad (n \geq k+1)$$

$$||x'_k||_k/||g||_k||g^{-1}||_k \leq ||x_1 + \cdots + x_k||_k \leq \sum_{i=1}^{k}||x_i||_k = \sum_{i=1}^{k}||x_i||_i$$

$$\sum_n \frac{||x'_n||_n}{\varepsilon_n} \leq \sum_{k<n}\frac{||g||_k||g^{-1}||_k}{\varepsilon_n}||x_n||_n + \frac{1}{\varepsilon_k}\sum_{i=1}^{k}||x_i||_i||g||_k||g^{-1}||_k$$

$$< 1 \qquad \mathrm{if}\, 1 + \sum x_n \in U(\{\varepsilon'_n\})$$

$$\varepsilon'_n = \frac{\varepsilon_n}{||g||_k||g^{-1}||_k} \quad \mathrm{for}\, n > k$$

$$\varepsilon'_n = \frac{\varepsilon_k}{||g||_k||g^{-1}||_k} \quad \mathrm{for}\, n \leq k$$

これで $U(\{\varepsilon_n\}) \supset gU(\{\varepsilon'_n\})g^{-1}$が示された。

辰馬氏論文により、帰納極限位相 $\mathfrak{U}_1$に関し G は位相群になる。この事を認めて $\mathfrak{U}_1$が $\mathfrak{U}_2$と一致することを check する。

まず${}^{\forall}U(\{\varepsilon_n\}) \in \mathfrak{U}_2$

$${}^{\forall}n, \qquad U(\{\varepsilon_n\}) \cap G_n = \{1 + \sum_{k=1}^{n} x_n \in G | x_k \in M_k \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{||x_k||_k}{\varepsilon_k} < 1\}$$

を証明する。

$\supset$は明らかである。$\subset$を証明する。$1 + \sum_{k=1}^{N} x_k \in U(\{\varepsilon_n\}) \cap G_n$とする。$N > n$ のときが問題である。$x'_k = x_k (k < n), x'_n = \sum_{k=n}^{N} x_k$とおく。$\{\varepsilon_k\}$ は単調減少と仮定しているので $1 > \sum_k \frac{||x_k||_k}{\varepsilon_k} > \sum_k \frac{||x_k||_k}{\varepsilon_{\mathrm{Min}(k,n)}} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{||x'_k||_k}{\varepsilon_k}$ となり$\subset$が証明された。

$U(\{\varepsilon_n\}) \cap G_n$は$G_n$の1の近傍である。従って$U(\{\varepsilon_n\})$は帰納極限位相で$G$の1の近傍である。すなわち$\mathfrak{U}_1$は$\mathfrak{U}_2$より強い。

$^\forall U \in \mathfrak{U}_1$に対し

$$^\exists U_1 \in \mathfrak{U}_1 \quad U_1^2 \subset U$$

$$^\exists U_2 \in \mathfrak{U}_1 \quad U_2^2 \subset U_1$$

$$^\exists U_3 \in \mathfrak{U}_1 \quad U_3^2 \subset U_2$$

このようにして$\{U_n\}_{n=1}^\infty$を決める。

$$U \supset U_1^2 \supset U_2^2 U_1 \supset U_3^2 U_2 U_1 \supset \cdots$$

$^\forall n, \quad ^\exists \varepsilon_n > 0, \quad U_n \supset \{1 + x | x \in GL(n, \mathbb{C}), \|x\|_n < \varepsilon_n\}.$

$\varepsilon_n < \frac{1}{2^n}, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > 0$となるように取ることが出来る。

$\varepsilon_1 > {^\exists \varepsilon_1'} > 0$

$\mathrm{Min}(\varepsilon_1', \varepsilon_2) > {^\exists \varepsilon_2'} > 0 \quad (1 - \varepsilon_1')^{-1} \varepsilon_2' < \varepsilon_2$

$\mathrm{Min}(\varepsilon_2', \varepsilon_3) > {^\exists \varepsilon_3'} > 0 \quad \{1 - (\varepsilon_1' + \varepsilon_2')\}^{-1} \varepsilon_3' < \varepsilon_3$

$\mathrm{Min}(\varepsilon_3', \varepsilon_4) > {^\exists \varepsilon_4'} > 0 \quad \{1 - (\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_3')\}^{-1} \varepsilon_4' < \varepsilon_4$

$\vdots$

$^\forall x \in U(\{\varepsilon_n'\})$に対し、$x = 1 + \sum_{n=1}^{N} x_n$とおく。

このとき$x \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n\right)^{-1} \in U_N$となる。なぜなら

$$x \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n\right)^{-1} = 1 + x_N \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n\right)^{-1}$$

であり

$$\left\| x_N \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n\right)^{-1} \right\|_N \leq \varepsilon_N' \left(1 - \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_n'\right)^{-1} < \varepsilon_N$$

よってε_Nの定め方より$x \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n\right)^{-1} \in U_N$を得る。同様にして

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{N-2} x_n\right)^{-1} \in U_{N-1}$$

であり、これを繰り返して結局

$$x \in U_N \cdot U_{N-1} \cdots U_1 \subset U$$

$$\therefore \qquad U(\{\varepsilon'_n\}) \subset U$$

従って $\mathfrak{U}_2$ は $\mathfrak{U}_1$ より強いと分かり、二つの位相は一致する。

§2 $GL(\Lambda), \Lambda = C(X, \mathbb{C})$ の場合

この§では X をコンパクト位相空間, Λ を X 上の複素数値連続関数全体 $C(X, \mathbb{C})$ とする。Λ に一様ノルム $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$ を入れると複素数係数の 1 を持つ可換 Banach algebra になる。Λ^n にノルムを $a = (a_i) \in \Lambda^n$ に対し $\|a\|_n = \max_i \|a_i\|$ により定める。$M_n(\Lambda)$ には作用素ノルムを入れると $M_n(\Lambda)$ も 1 を持つ Banach algebra になる。$M(\mathbb{C})$ のときと同様にして局所凸位相ベクトル空間としての $n \to \infty$ とした帰納極限を考えて $M(\Lambda)$ は位相環になる。その 0 の近傍+1 を $GL(\Lambda)$ の 1 の近傍と考えて、$GL(\Lambda)$ は位相群になる。

$M_n(\Lambda) \to C(X, M_n(\mathbb{C}))$ の同型対応を $(a_{ij}(x))$ に対して $x \mapsto (a_{ij}(x))$ を対応させることにより定義する。これは Banach algebra として等長同型写像である。なぜなら $(a_{ij}(x))$ の $M_n(\Lambda)$ におけるノルムは、$t \in \Lambda^n$ として

$$\sup_{\|t\|_n \le 1} \left\| \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) t_j(x) \right\| \right\|_n = \sup_{\|t\|_n \le 1} \max_i \max_{x \in X} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) t_j(x) \right|$$

$$= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) t_j(x) \right| \middle| \text{条件} (*) \right\}$$

条件 $(*)$ は $1 \le i \le n, x \in X, \max_j \max_{x \in X} |t_j(x)| \le 1,$ である。

同じく $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ におけるノルムは、$\tau \in \mathbb{C}^n$ として

$$\max_{x \in X} \|a_{ij}(x)\|_{M_n(\mathbb{C})} = \max_{x \in X} \max_{\|\tau\|_n \le 1} \left\| \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \tau_j \right\| \right\|_n = \max_{x \in X} \max_{\|\tau\|_n \le 1} \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \tau_j \right|$$

$$= \max\left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\tau_j \right\| \text{条件}\ (**) \right\}$$

条件 $(**)$ は $1 \leq i \leq n, x \in X, \max_j |\tau_j| \leq 1,$ である。

特に $t_j(x)$ =const.$= \tau_j$ とおくことにより、$M_n(\Lambda)$ におけるノルムの方が大きいかまたは等しいことは分かる。逆に $M_n(\Lambda)$ におけるノルム (を定める sup) に任意に近いように $i_0, x_0, \{t_j^0(x)\}_{j=1}^n$ を取ると、$t_j^0(x_0) = \tau_j$ とおくことにより、$C(X, M_n(\mathbb{C}))$ におけるノルムの方が大きいかまたは等しいことが分かる。よって両方のノルムは一致する。

$M_n(\Lambda)$ と $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ 双方の可逆元全体を取ることにより $GL_n(\Lambda)$ と $C(X, GL_n(\mathbb{C}))$ とは位相群として同型になる。そこで $n \to \infty$ とした帰納極限を取り $GL(\Lambda)$ を $C(X, GL(\mathbb{C}))$ に埋め込むことが出来る。これが抽象群として同型になっていることを示そう。全射かどうかだけが問題である。$f \in C(X, GL(\mathbb{C}))$ に対し $f(X)$ は $GL(\mathbb{C})$ のコンパクト部分集合になる。このとき $^\exists n \in \mathbb{N}, f(X) \subset GL_n(\mathbb{C})$ が示されれば $f \in GL_n(\Lambda) \subset GL(\Lambda)$ が言える。

背理法による。C を $GL(\mathbb{C})$ のコンパクト部分集合とする。$C - 1$ は $M(\mathbb{C})$ のコンパクト集合である。$^\forall n \in \mathbb{N}, {}^\exists c_n \in C, c_n \notin GL_n(\mathbb{C})$ として矛盾を導く。$\max\limits_{\max(i,j)>n} |c_{nij} - \delta_{i,j}| > \varepsilon_n > 0$, ε_n は単調減少とする。この $\{\varepsilon_n\}$ に対し $M(\mathbb{C})$ の 0 の近傍

$$V = V(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left\{ \sum_n x_n \,\middle|\, x_n \in M_n(\mathbb{C}), \quad \sum_n \frac{\|x_n\|_n}{\varepsilon_n} < 1 \right\}$$

を考える。任意の m に対し n が十分大なら $c_n - c_m \notin V$ を示せば $\{c_n - 1\}$ は $M(\mathbb{C})$ で集積点をもち得ず、C のコンパクト性に反する。$c_m \in GL_k(\mathbb{C})$ とし $n > k$ とする。このとき $c_n - c_m = \sum_{j=1}^{l} x_j, x_j \in M_j(\mathbb{C})$ とすると $l > n$ であり $c_n - 1 \in M_n(\mathbb{C}) + x_{n+1} + \cdots + x_l$ だから

$$\varepsilon_n \leq \|x_{n+1} + \cdots + x_l\|_l \leq \|x_{n+1}\|_{n+1} + \cdots + \|x_l\|_l \;\therefore\quad \sum_{j=n+1}^{l} \frac{\|x_j\|_j}{\varepsilon_j} \geq \frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{j=n+1}^{l} \|x_j\|_j \geq 1.$$

よって $c_n - c_m \notin V$ を得る。

次に $GL(\Lambda)$ と $C(X, GL(\mathbb{C}))$ の位相について考える。

<u>定理</u>　$GL(\Lambda)$ には $M_n(\Lambda)$ の局所凸位相ベクトル空間としての帰納極限から定まる位相を入れると、$GL(\Lambda)$ は位相群として $C(X, GL(\mathbb{C}))$ と同型である。

<u>証明</u>　$GL(\Lambda)$ の 1 の基本近傍系は

$$U_1(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left\{ 1 + \sum_n f_n \,\middle|\, f_n \in M_n(\Lambda) \quad \sum_n \frac{\|f_n\|_n}{\varepsilon_n} < 1 \right\}$$ として

$$\mathfrak{U}_1 = \{U_1(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) | \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots > 0\}.$$

$C(X, GL(\mathbb{C}))$ の 1 の基本近傍系は

$$U_2(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{f | {}^{\forall}x \in X, f(x) \in U(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty})\},$$

$$U(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left\{ y = 1 + \sum_n y_n \,\middle|\, y_n \in M_n(\mathbb{C}) \quad \sum_n \frac{\|y_n\|_n}{\varepsilon_n} < 1 \right\} \text{として}$$

$$\mathfrak{U}_2 = \{U_2(\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}) | \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots > 0\}.$$

$U_1(\{\varepsilon_n\})$ と $U_2(\{\varepsilon_n\})$ について

$f \in U_1(\{\varepsilon_n\})$ のとき各 $x \in X$ に対し $y_n = f_n(x)$ とおくことにより $U_1(\{\varepsilon_n\}) \subset U_2(\{\varepsilon_n\})$ が分かる。

$U_2(\{\frac{\varepsilon_n}{2^n}\}) \subset U_1(\{\varepsilon_n\})$ を示そう。

$f \in U_2(\{\frac{\varepsilon_n}{2^n}\})$ とする。$f(X) \subset GL_N(\mathbb{C})$ とする。

${}^{\forall}x \in X$ に対し $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{N} y_n, y_n \in M_n(\mathbb{C}), \|y_n\|_n < \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ と書ける。$x_0 \in X$ を一つ fix して、このような $\{y_n\}$ を定め、$n < N$ に対し $y_n(x) = y_n, y_N(x) = f(x) - 1 - \sum_{n=1}^{N-1} y_n$ と定義する。このとき $y_N(x_0) = y_N$ だからある x_0 の開近傍 U_{x_0} で $\|y_N(x)\|_N < \frac{\varepsilon_N}{2^N}$ となる。X はコンパクトだから有限集合 A が存在して $\{U_{x_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ は X の開被覆になっている。$\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ をこの開被覆の上に乗る 1 の分解とする。すなわち $f_\alpha(x)$ は $X \to [0,1]$ の連続関数で $x \notin U_\alpha$ に対し $f_\alpha(x) = 0, \sum_\alpha f_\alpha = 1$ とする。$n \leq N$ に対し $f_n(x) = \sum_\alpha y_{\alpha,n}(x) f_\alpha(x)$ とおく。$n < N$ のとき $\|f_n(x)\| \leq \sum_\alpha \|y_{\alpha,n}\| f_\alpha(x) < \frac{\varepsilon_n}{2^n}$. また $\|y_{\alpha,N}(x)\| < \frac{\varepsilon_N}{2^N}$ if $f_\alpha(x) \neq 0$ だから、この不等式は $n = N$ に対しても成立する。このとき $f = 1 + \sum_{n=1}^{N} f_n, \sum_{n=1}^{N} \frac{\|f_n\|_n}{\varepsilon_n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} < 1$ が成り立つ。従って $U_2(\{\frac{\varepsilon_n}{2^n}\}) \subset U_1(\{\varepsilon_n\})$ が示された。

以上より二つの位相は一致する。

<u>注意</u>　本定理の位相は、辰馬の意味の筍位相とも一致する。§1 と同様にして、本定理の位相は群位相の中で最強のものと分かる。筍位相もそうだから、両者は一致する。ただし辰馬の条件 (PTA)

$${}^{\forall}n, {}^{\forall}U, {}^{\exists}V \subset U, V = V^{-1}, {}^{\forall}m > n, {}^{\forall}W, {}^{\exists}W', W'V \subset VW$$

を check しておく必要がある。(U, V は $GL_n(\Lambda)$ の 1 の近傍、W, W' は $GL_m(\Lambda)$ の 1 の近傍)。

V は $V \subset \{1+x | \|x\|_n < 1\}$ をみたし $V = V^{-1}$ とする。$W \supset \{1+y | \|y\|_m < \varepsilon\}$ とするとき $W' = \{1+y | \|y\|_m < \frac{\varepsilon}{4}\}$ と取ればよい。なぜなら $w = 1+y \in W', \|y\|_m < \frac{\varepsilon}{4}$ として、$v \in V$ に対し $wv = v(v^{-1}wv)$ より $v^{-1}wv \in W$ を示せばよいが $v^{-1}wv = 1 + v^{-1}yv, \|v^{-1}yv\|_m \leq \|v^{-1}\|_n \|y\|_m \|v\|_n \leq 4\|y\|_m < \varepsilon$ となるから O.K. である。($\because \quad \|v\|_n \leq 1 + \|x\|_n < 2$)。

次に $GL_n(\Lambda)$ の帰納極限位相について考える。これが箘位相と一致するかどうかは、帰納極限位相が群位相であるかどうかと同値である。辰馬氏の結果によれば、位相群の帰納極限 $G = \varinjlim G_n$ において各 G_n が局所コンパクト群であれば、帰納極限位相は群位相になる。ところが局所コンパクト性はほぼ必要十分に近い条件であることが示される。

辰馬氏の反例 $\mathbb{Q}^n$（または $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}^n$）の加法群、平井–下村の反例: 可算コンパクト微分可能多様体 M 上の、コンパクト集合の外で恒等写像となる微分同相写像全体のなす群 $Diff_0(M)$ は、いずれも帰納極限位相が群位相でない例であるが、それにつけ加えて Λ が局所コンパクトでない Banach algebra のときの一般線型群 $GL_n(\Lambda)$ も同様な反例となる。しかも「群位相にならない」ことの証明は、局所コンパクトでないことに起因する共通の証明方針で達成される。以下に §を改めてこのことを述べることにする。

§3 辰馬の定理の逆

以下で $n < m$ のとき $G_n \hookrightarrow G_m$ は連続単射なうめこみとする。$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ 上に帰納極限位相が考えられるが、辰馬の示したように各 G_n が局所コンパクト群ならば、帰納極限位相は群位相となる。この命題は次の形に弱められる。

<u>定理</u>　次の条件のもとに、帰納極限位相は群位相になる。

「$^\forall n, {}^\exists U, {}^\exists m > n, \overline{U}^{(m)}$ はコンパクト」

ただし U は G_n における単位元 1 の近傍、$\overline{U}^{(m)}$ は G_m における U の閉包を意味する。

<u>注意</u>　$m > n$ に対して上の「　」が成り立てば、$n' \leq n, m \leq m'$ として (n', m') に対しても「　」はなりたつ。なぜなら $U \cap G_{n'}$ は $G_{n'}$ における 1 の近傍で $\overline{U \cap G_{n'}}^{(m)} \subset \overline{U}^{(m)}$

である。またコンパクト集合$\overline{U}^{(m)}$の連続像として$\overline{U}^{(m)}$は$G_{m'}$の中でもコンパクト、従って閉であり$\overline{U}^{(m')}=\overline{U}^{(m)}$となる。

<u>定理の証明</u>　$\{G_n\}$の部分列を取りなおすことにより、G_nのある1の近傍UはG_{n+1}の中で相対コンパクトと考えて良い。証明は二段階に分けて、$\{G_n\}$について辰馬の条件(PTA)がみたされること（従って筍位相が定義できること）、および帰納極限位相は筍位相と一致すること、を示す。

<u>第一段</u>　UはG_nの1の近傍で、G_{n+1}における閉包$\overline{U}$はコンパクトとする。

明らかに$\overline{U}\subset UW$であり、Wは開近傍と考えて良いから、UWはopen,$\overline{U}$はコンパクトより$^\exists W', W'\overline{U}\subset UW$となる。このとき明らかに$W'U\subset UW$となる。

<u>第二段</u>　帰納極限位相での1を含む開集合Oが、筍位相でも1の近傍になっていることを示せばよい。すなわちG_nの1の対称近傍の列$\{W_n\}$で$U\supset W[1]$となるものを見出せばよい。つまり

$$^\forall n, W_nW_{n-1}\cdots W_2W_1^2W_2\cdots W_{n-1}W_n\subset O_n(=O\cap G_n)$$

を示せばよい。

O_nは1を含むG_nの開集合である。まず$^\exists W_1:G_1$の1の対称近傍、$\overline{W}_1^{(2)}$がコンパクトかつ$(\overline{W}_1^{(2)})^2\subset O_2$となることを示す。

G_2における1の近傍V_2を適当に取ると$V_2^3\subset O_2$ よって$\overline{V_2^2}^{(2)}\subset O_2$. $V_2\cap G_1\supset W_1$(対称近傍), $\overline{W}_1^{(2)}$はコンパクトとすると、$(\overline{W}_1^{(2)})^2=\overline{W_1^2}^{(2)}\subset\overline{V_2^2}^{(2)}\subset O_2$を得る。

以下帰納法による。

$\overline{W}_n^{(n+1)}\cdots\overline{W}_2^{(3)}(\overline{W}_1^{(2)})^2\overline{W}_2^{(3)}\cdots\overline{W}_n^{(n+1)}\subset O_{n+1}$ が成り立っていたとする。（このとき $W_n\cdots W_2W_1^2W_2\cdots W_n\subset O_{n+1}\cap G_n=O_n$）. 上式左辺を$K_{n+1}$で表すと$K_{n+1}$は$G_{n+1}$の従って$G_{n+2}$のコンパクト集合、$O_{n+2}$は open だから$^\exists V_{n+2}, G_{n+2}$の1の近傍$V_{n+2}K_{n+1}V_{n+2}\subset O_{n+2}$. $V_{n+2}'^2\subset V_{n+2}$とすると$\overline{V'_{n+2}}^{(n+2)}\subset V_{n+2}$. $V'_{n+2}\cap G_{n+1}\supset W_{n+1}$（対称近傍）、$\overline{W}_{n+1}^{(n+2)}$はコンパクトとする。$\overline{W}_{n+1}^{(n+2)}\subset\overline{V'_{n+2}}^{(n+2)}\subset V_{n+2}$だから$\overline{W}_{n+1}^{(n+2)}K_{n+1}\overline{W}_{n+1}^{(n+2)}\subset O_{n+2}$ が得られ、左辺をK_{n+2}と考えてこれで帰納法による証明は完成した。

<u>注意</u>　G_nがG_{n+1}の閉部分群（閉集合かつ位相が制限位相と一致）のときは、定理の仮定は各G_nが局所コンパクトなことと同値になる。（G_nの1の近傍Uに対し$\overline{U}^{(n+1)}$はGに含まれて$\overline{U}^{(n)}$と一致するから。）

<u>定理</u>　うめこみ$G_n \hookrightarrow G_{n+1}$は同相写像（すなわち$G_n$は位相群として$G_{n+1}$の部分群）とする。$G_1$が任意の$n$に対し$G_n$の中でopenならば帰納極限位相は群位相である。（「$^\exists n, {}^\forall m > n$, G_nはG_mの中でopen」としても同じこと。）

<u>証明</u>　G_1はG_nの開部分群だから、G_1の1の基本近傍系$\mathfrak{U}$はG_nでもそうである。従って$\mathfrak{U}$は帰納極限位相でも1の基本近傍系となる。これが群位相となるための五つの条件のうち(1) $^\forall U \in \mathfrak{U}, 1 \in U$, (2) $^\forall U, V \in \mathfrak{U}, {}^\exists W \in \mathfrak{U}, W \subset U \cap V$, (3) $^\forall U \in \mathfrak{U}, {}^\exists V \in \mathfrak{U}, V^{-1} \subset U$, (4) $^\forall U \in \mathfrak{U}, {}^\exists V \in \mathfrak{U}, V^2 \subset U$ をみたすことは明らか。残った条件(5) $^\forall g \in G, {}^\forall U \in \mathfrak{U}, {}^\exists V \in \mathfrak{U}, gVg^{-1} \subset U$ については、$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$より$^\exists n \geq 1, g \in G_n$であり、$\mathfrak{U}$が$G_n$における1の基本近傍系であることから当然成り立つ。

問題にしたいのは、前二定理の逆である。ただし更に付加条件として「各G_nにおいて1は可算基本近傍系をもつ」ことを仮定する。このとき、次の形で逆が成り立つ。

<u>定理</u>　うめこみ$G_n \hookrightarrow G_{n+1}$は同相写像で、各$G_n$において1は可算基本近傍系をもつとする。前二定理の仮定が満たされていないとする。すなわち

(1) $^\exists n_0, {}^\forall U$ （G_{n_0}の1の近傍）, $^\forall m > n_0, \overline{U}^{(m)}$は$G_m$でコンパクトでない。

(2) $^\forall n, {}^\exists m > n$, G_nはG_mの中でopenでない。

とする。このとき帰納極限位相は群位相でない。

<u>注意</u>　上の定理でさらにG_nがG_{n+1}の閉部分群であることを仮定する。このとき、(1)はあるG_nが局所コンパクトでないことと同値になる。

今までに知られている「帰納極限位相が群位相にならない例」はすべてこの範疇に属する。すなわち今までの反例はすべて本定理の証明によって統一的に理解できる。また「局所コンパクト性」は必要十分にきわめて近い条件であることも分かる。

<u>証明</u>　帰納極限位相は$\{G_n\}$をその部分列で取りかえても変わらない。従って定理の条件(1)において$n_0 = 1$と取ることができ、また(2)において「G_nはG_{n+1}の中でopenでない」と考えることができる。

もし帰納極限位相が群位相だったとすると、1の任意の近傍Uに対し、1の近傍Vが存在して$V^2 \subset U$となる。このとき、$V \cap G_n = V_n$はG_nにおける1の近傍で$V_1 V_n \subset U \cap G_n$となる。従って次のことが成り立たねばならない。

「$^\exists V_1$ （G_1における1の近傍）, $^\forall n, {}^\exists V_n$ （G_nにおける1の近傍）, $V_1 V_n \subset U \cap G_n$」

従ってG_nにおける開近傍列U_nで、次の条件をみたすものを見つければ、定理の証明は完成

する。

「$1 \in U_1, U_{n+1} \cap G_n = U_n$, ${}^{\forall}V_1$（G_1における 1 の近傍）,
${}^{\exists}n > 1, {}^{\forall}V_n$（$G_n$における 1 の近傍）, $V_1 V_n \not\subset U_n$」

G_1における 1 の可算基本近傍系を $\{V_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$とする。$U_n$を帰納的に定めて条件 $(*)$: 「${}^{\forall}n > 1, {}^{\forall}V_n$（$G_n$における 1 の近傍）, $V_{1,n}V_n \not\subset U_n$」をみたすようにすればよい。($\because$ ${}^{\forall}V_1$（G_1における 1 の近傍）, ${}^{\exists}n, V_{1,n} \subset V_1$)。

G_1の開集合 $U_1 \ni 1$ は任意に取る。(例えば $U_1 = G_1$としてよい)。$k < n$ に対しては U_kは既に定義されて条件 $(*)$ をみたすとする。($n = 1$ のときは $k > 1$ かつ $k \leq n$ をみたす kはないから、上の条件は空になる)。

定理の仮定より G_{n-1}は G_nの中で open でなく、G_nにおいて 1 は可算基本近傍系をもつので${}^{\exists}\{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in G_n \setminus G_{n-1}, \lim_{j\to\infty} x_j = 1$.

一方$\overline{V_{1,n}}^{(n)}$は（G_nで）コンパクトでないので、再び G_nにおいて 1 が可算基本近傍系をもつことと合わせて${}^{\exists}\{y_j\}_{j=1}^{\infty}, y_j \in V_{1,n}, \{y_j\}$ は G_nで集積点をもたない。すると、$z_j = y_j x_j$ とおくと、$\{z_j\}$ は G_nで集積点をもたない。($\because$ $z = \lim_{k\to\infty} x_{j_k} y_{j_k}$とすると $\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = 1$ だから $z = \lim_{k\to\infty} y_{j_k}$でなくてはならない)。従って $Z = \{z_j | 1 \leq j < \infty\}$ は G_nの閉集合である。

また $z_j \notin G_{n-1}$（$\because$ $x_j \notin G_{n-1}, y_j \in G_1 \subset G_{n-1}$）だから、$Z \cap G_{n-1} = \phi$. 従って $G \setminus Z \supset G_{n-1} \supset U_{n-1}$. 一方うめこみ $G_{n-1} \hookrightarrow G_n$は同相写像だから、${}^{\exists}U'_n$（$G_n$の開集合）$U'_n \cap G_{n-1} = U_{n-1}$. このとき $U_n = U'_n \cap (G \setminus Z)$ は G_nの開集合で $U_n \cap G_{n-1} = U_{n-1}$となる。一方${}^{\forall}j, z_j = y_j x_j \notin U_n$であり、$x_j \to 1$ in $G_n, y_j \in V_{1,n}$だから、所定の結果「${}^{\forall}V_n$（G_nにおける 1 の近傍）, $V_{1,n}V_n \not\subset U_n$」が得られる。

（証明終）

参考文献

[1] J.W.Milnor: *Introduction to Algebraic K-theory.* Ann. Math. Stud., Princeton Univ. Press, 1971. 第 7 章

[2] 辰馬伸彦: 位相群の帰納的極限の群位相とユニタリ表現. 本講究録（日本数学会の和文誌にも関連記事が掲載される予定）.

[3] H.Shimomura and T.Hirai: *On Group Topologies on the Group of Diffeomorphisms.* 本講究録